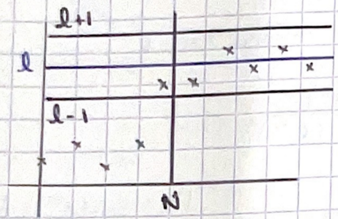
4) Encadrement d'une suite

Propriété : toute suite qui converge est bornée.

Preuve :

hyp : $\exists l \in \mathbb{R}$, $u_n \to l$ ie $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.



$\varepsilon = 1$.
avec $\varepsilon = 1$, on pose

$M = Max(l+1, Max(u_0, \dots, u_N))$
$m = min(l-1, min(u_0, \dots, u_N))$.

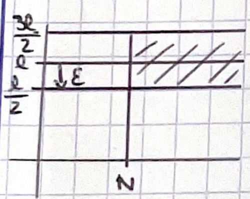
Soit $n \in \mathbb{N}$ • ou bien $n \in [\![0, N]\!]$ et ainsi
$m \leq min(u_0, \dots, u_N) \leq u_n \leq Max(u_0, \dots, u_N) \leq M$.

• ou bien $n > N$ et ainsi $|u_n - l| < 1$
$\Rightarrow m \leq l-1 < u_n < l+1 \leq M$.

Dans tous les cas, $m \leq u_n \leq M$ $\Rightarrow$ la suite est bornée.

Prop : Si $u_n \to l > 0$
alors $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{l}{2}$
(à partir d'un certain rang, $u_n \geq \frac{l}{2}$)

Preuve :



$\varepsilon = \frac{l}{2}$.

$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n > l - \varepsilon = \frac{l}{2}$.

Remarque : donc si $u_n \to l > 0$
$\frac{1}{u_n}$ existe APCR (à partir d'un certain rang)
et $0 < \frac{1}{u_n} < \frac{2}{l}$ donc est bornée.

III - Opérations sur les limites

1) Suites de limite nulle

Prop : Si $|u_n| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$
alors $u_n \to 0$.

Preuve :

hyp : $|u_n| \leq \alpha_n$
$\forall \varepsilon < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \alpha_n < \varepsilon$.

Si $n \geq N$ on a donc $|u_n| \leq \alpha_n < \varepsilon$ donc $|u_n| \to 0$
donc $u_n \to 0$.

IKDS : Mq $u_n \to 0$ $\Rightarrow$ on majore $|u_n|$.

exemple : $u_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{n^2 + 2 + \cos(e^{-n})}$

$|u_n| = \dfrac{|n + \sin(n^2)|}{|n^2 + 2 + \cos(e^{-n})|}$ $\quad |n + \sin(n^2)| \leq n + |\sin(n^2)| \leq n+1$

$2 \cos(e^{-n}) \geq 1$.

donc $|n^2 + 2 + \cos(e^{-n})| \geq n^2 + 1$.

$|u_n| \leq \dfrac{n+1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n} \to 0$.

exemple : $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} k^2}{n^4}$

$|u_n| = \dfrac{1}{n^4} \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} k^2 \right| \underset{\text{ITG}}{\leq} \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n} k^2 \leq \dfrac{1}{n^4} \times \underset{\text{+ gros}}{(n^2)} \times \underset{\text{nb de termes}}{(n+1)} = \dfrac{n+1}{n^2} \to 0$

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \to 0 \\ v_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to 0$.

Preuve :

$u_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon'$.
$v_n \to 0$

Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists N_1$ et N_2,

on pose $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$.

$n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n| \underset{\text{IT}}{\leq} |u_n| + |v_n| < 2\varepsilon' = \varepsilon \Rightarrow u_n + v_n \to 0$.

Prop : $\left.\begin{array}{l} (u_n)_n \text{ bornée} \\ v_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \to 0$. bornée $\times$ tend vers 0 = tend vers 0

Preuve

hyp : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
$v_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \ldots\ldots n \geq N \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon'$.

$\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, $\exists N$ tq $|v_n| < \varepsilon'$

donc $|u_n v_n| < M\varepsilon' = \varepsilon$.

ccl : $u_n v_n \to 0$.

2) Opérations algébriques

Théorème :

① $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$.

② $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u_n \to \lambda l$.

③ $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \to l l'$

④ $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}$.

Preuve :

① $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \Rightarrow u_n - l \to 0 \\ v_n \to l' \Rightarrow v_n - l' \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n - l) + (v_n - l') \to 0$

$\Rightarrow (u_n + v_n) - (l + l') \to 0$

$\Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$.

② $u_n \to l \Rightarrow (u_n - l) \to 0$

$\Rightarrow \lambda(u_n - l) \to 0 \Rightarrow \lambda u_n - \lambda l \to 0$

$v_n = \lambda$ cste donc bornée.

$\Rightarrow \lambda u_n \to \lambda l$.

③ $u_n - l \to 0$

$v_n - l' \to 0$

$u_n v_n - l l' = (u_n - l) \times v_n + l v_n - l l'$

⚠

$= \underset{\downarrow 0}{(u_n - l)} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{CV} \\ \text{bornée}}}{v_n} + \underset{\in \mathbb{R}}{l} \underset{\downarrow 0}{(v_n - l')} \to 0$

④ si $l' > 0$

$v_n > \frac{l'}{2}$ APCR donc $\frac{u_n}{v_n}$ existe et $\left|\frac{1}{v_n}\right|$ bornée

(idem si $l' < 0$)

$\frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'} = \frac{u_n l' - v_n l}{v_n l'} = \frac{(u_n - l) l' + l l' - v_n l}{v_n l'}$

$$= \underbrace{\frac{1}{l' v_n}}_{\text{bornée}} \times \Big(\underbrace{(u_n - l)}_{\to 0} \underbrace{l'}_{\text{cste}} + \underbrace{(-l)}_{\text{cste}} \underbrace{(v_n - l')}_{\to 0} \Big) \longrightarrow 0$$

Prop : Si $u_n \to +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée
alors $u_n + v_n \to +\infty$.

Prop : Si $u_n \to +\infty$ et $\exists a > 0$ tq $v_n > a$ APCR (en particulier si $v_n \to l > 0$)
alors $u_n v_n \to +\infty$

IV - Théorèmes liés à l'ordre.

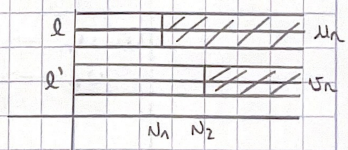
Ordre donc ne se généralise pas à $\mathbb{C}$, ...

1) Compatibilité avec l'ordre.

Proposition : Si $u_n \leq v_n$ APCR
si $u_n \to l$, $v_n \to l'$
alors $l \leq l'$ (on dit que l'on passe à la limite dans l'inégalité).

Preuve :

On peut supposer, quitte à oublier les 1ers termes, que $\forall n$, $u_n \leq v_n$.
Par l'absurde si $l > l'$.



Soi $\varepsilon = \frac{l - l'}{3}$

APCR N_1, $l - \varepsilon \leq u_n$
APCR N_2, $v_n \leq l' + \varepsilon$ or $l' + \varepsilon < l - \varepsilon$.
($\Leftrightarrow 2\varepsilon < l - l'$
$\Leftrightarrow 2/3 < 1$ vrai)
donc si $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$ on a $v_n < u_n$ absurde.

Remarque : avec l'une des suites constante, on a donc
si $u_n \leq a$ APCR
et que $u_n \to l$
alors $l \leq a$
$b \leq v_n$ et $v_n \to l'$ $\Rightarrow b \leq l'$.

Théorème d'encadrement :

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ APCR et si $u_n \to l$, $w_n \to l$ alors $v_n \to l$.

Preuve :

On a $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$ or $w_n - u_n \to 0$

donc $v_n - u_n \to 0$
et $v_n = \underbrace{(v_n - u_n)}_{\to 0} + \underbrace{u_n}_{\to l} \to l$.

exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

$1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 < n^2 \leq n^2+k \leq n^2+n = n(n+1)$

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$

$\searrow 1 \swarrow$

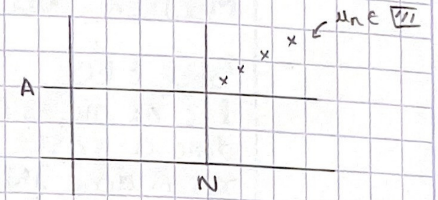
ccl : $u_n \to 1$.

Divergence vers l'infini :

$u_n \leq v_n$ APCR et $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

Preuve :

$\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N_1$ tq $n \geq N_1$
on a $u_n \geq A$
donc $v_n \geq A$
ie $v_n \to +\infty$.



exemple (classique) :

si $x > 1$ alors $x^n \to +\infty$.

en effet, $x = 1+h$ où $h > 0$ donc $x^n = (1+h)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k$
$= 1 + nh + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1+nh \to +\infty$

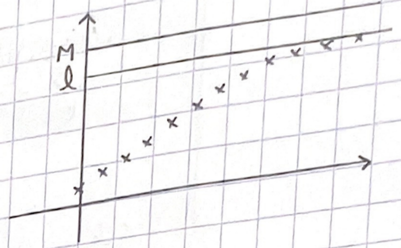
$n \to +\infty$.

2) Le théorème de la limite monotone

Théorème :
① Toute suite croissante et majorée converge
② " et non majorée DV vers $+\infty$
③ Toute suite décroissante et minorée CV
④ " et non minorée DV vers $-\infty$

Preuve :

On montre ① et ②
Pour ③ et ④, on applique ① et ② à $v_n = -u_n$.

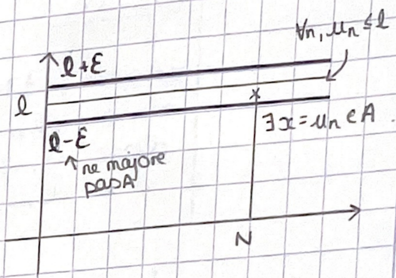


① Posons $l = \sup(\{u_n, n \in \mathbb{N}\})$
si ce sup existe

Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
↑
valeurs prises par la suite.

$u_0 \in A$ donc $A \neq \emptyset$
la suite est majorée donc $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
donc $\forall x \in A$ (un x de A c'est un u_n pour un certain n)
on a $x \leq M$.

ccl : $A \neq \emptyset$, majorée, $\sup(A) = l$ existe.



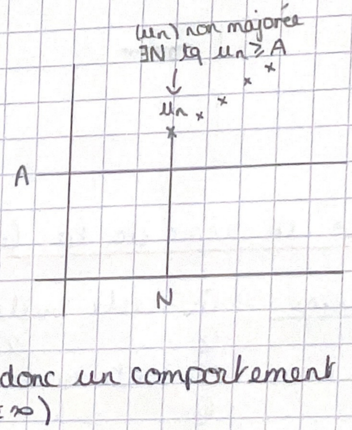
Montrons que $u_n \to l$

Soit $\varepsilon > 0$
$l-\varepsilon$ ne majore plus A
donc il existe $x \in A$ tq $l - \varepsilon < x \leq l$
$x \in A$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $x = u_N$
donc $l - \varepsilon < u_N \leq l$.

Si $n \geq N$, par croissance de $(u_n)_n$ on a $u_N \leq u_n$
$u_n \in A$ donc (l majore A), $u_n \leq l$.

ainsi $l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l < l + \varepsilon$.

donc $u_n \to l$.



② Soit $A \in \mathbb{R}$ $(u_n)_n$ non majorée
donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $u_N > A$.

si $n \geq N$ on a $u_n \geq u_N > A$
↑
croissance de (u_n)

donc $u_n \to +\infty$.

Remarques : * les suites monotones ont donc un comportement "simple" (CV ou DV vers $\pm\infty$)

* on n'a pas la valeur de la limite ($l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et alors ?).

mais si M majore la suite alors $l \leq M$.
et $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} \leq l$.

<u>exemple</u> : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

$(u_n)_n$ ↑

$k \geq 2 \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$

$k^2 - k \leq k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$

<u>ccl</u> : (u_n) ↑ ⊕ majorée $\underset{\text{TLM}}{\Rightarrow} (u_n)_n$ CV

3) Le théorème des suites adjacentes.

Les 2 suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si par def :
- l'une est croissante
- l'autre est décroissante
- $v_n - u_n \longrightarrow 0$.

<u>Remarque</u> : l'usage veut que $(u_n)_n$ soit ↑
$(v_n)_n$ soit ↘.

<u>Théorème</u> : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ 2 suites adjacentes avec $(u_n)_n$ ↑ et $(v_n)_n$ ↘.
alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ CV vers la m̂ limite l.
et de plus $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \ u_n \leq l \leq v_p$

<u>Preuve</u> :

Soit $w_n = v_n - u_n$.
On montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n \geq 0$

$(v_n)_n$ ↘
(u_n) ↑ donc $(-u_n)$ ↘ or $w_n = v_n + (-u_n)$
donc w_n ↘.

<u>Remarque</u> : $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n$
$= \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0} \leq 0$

donc $(w_n)_n$ ↘ et $w_n \longrightarrow 0$

Par l'absurde, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $w_{n_0} < 0$

$w_n \leq w_{n_0}$ APCR

quand $n \to +\infty$ on obtient par passage à la limite
$\lim w_n = 0 \leq w_{n_0} < 0$ donc $0 < 0$ <u>absurde</u>.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
donc $u_n \leq v_n \leq v_0$ $\Rightarrow (u_n)$ majorée par v_0
$\uparrow$ $\searrow$ de v_n

or $(u_n)_n$ croissante donc (TLM) elle CV

idem $u_0 \leq u_n \leq v_n$
$\Rightarrow (v_n)$ minorée par u_0, $\searrow$ donc (TLM) CV

Soit $l_1 = \lim u_n$, $l_2 = \lim v_n$ alors

exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{n}$.

$(u_n)_n \nearrow$ OK déjà. $\qquad \left(\text{et } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

$v_n - u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $\qquad$ elles sont adj, donc CV vers la m̂ limite l.

Pour avoir l à 10^{-3} près ?

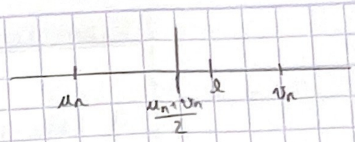
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$ $\Rightarrow$ et $0 \leq l - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{n}$

$-1/n = u_n - v_n \leq l - v_n \leq 0$.

ie $0 \leq l - u_n \leq 1/n$
$0 \leq v_n - l \leq 1/n$

Pour que $0 \leq l - u_n \leq 10^{-3}$ il SUFFIT d'avoir $1/n \leq 10^{-3}$
$\Leftrightarrow n \geq 1000$.

Remarque : (le coup du milieu)



On a $\left|\ell - \frac{u_n+v_n}{2}\right| \leq \frac{v_n - u_n}{2}$

Pour avoir $\left|\ell - \frac{u_n+v_n}{2}\right| \leq 10^{-3}$

il suffit d'avoir $n \geq 500$

on calcule u_{500}, $v_{500} = u_{500} + \frac{1}{500}$

et $\frac{u_{500}+v_{500}}{2} = \ell$ à 10^{-3} près.

V - Suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

à retenir : ① Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ie $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$.
On peut alors considérer 2 suites réelles $(Re(u_n))_n$ et $(Im(u_n))_n$.

② Il n'y a pas de bon ordre.
Donc pas de théorème ~~des gendarmes~~
~~de la limite monotone~~
~~suites adjacentes~~

1) Définition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{|u_n|}_{\text{module}} \leq M$

Remarque : $(u_n)_n$ bornée $\Leftrightarrow$ $(Re(u_n))_n$ et $(Im(u_n))_n$ sont bornées.

Preuve :

$\Rightarrow$ $|Re(u_n)| \leq |u_n| \leq M$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$.

$\Leftarrow$ S'il existe $(M_1, M_2) \in \mathbb{R}_+^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|Re(u_n)| \leq M_1$
$|Im(u_n)| \leq M_2$.

alors $|Re(u_n) + i\,Im(u_n)| \leq |Re(u_n)| + |Im(u_n)| \leq M_1 + M_2$.

Def de la CV :

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que $(u_n)_n$ CV vers ℓ si par def $|u_n - \ell| \to 0$.

Remarque : $u_n \to \ell \Leftrightarrow \begin{cases} Re(u_n) \to Re(\ell) \\ Im(u_n) \to Im(\ell) \end{cases}$.